

DAY — 09

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2024

III

02

1100

J-863

(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40) (ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs.

(8 Pages)

Max. Marks : 80

सूचना : प्रश्नपत्रिका एकूण चार विभागांत विभागलेली आहे.

- (१) **विभाग अ** – प्रश्न क्रमांक १ मध्ये एकूण ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे आहेत.
प्रश्न क्रमांक २ मध्ये अतिलघू उत्तरांचे एकूण ४ प्रश्न प्रत्येकी १ गुणांचे आहेत.
- (२) **विभाग ब** – प्रश्न क्रमांक ३ ते प्रश्न क्रमांक १४ प्रत्येकी २ गुणांचे लघूत्तरी १२ प्रश्न आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)
- (३) **विभाग क** – प्रश्न क्रमांक १५ ते प्रश्न क्रमांक २६ प्रत्येकी ३ गुणांचे लघूत्तरी १२ प्रश्न आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)
- (४) **विभाग ड** – प्रश्न क्रमांक २७ ते प्रश्न क्रमांक ३४ प्रत्येकी ४ गुणांचे दीर्घोत्तरी ८ प्रश्न आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा)
- (५) लॉग टेबलचा वापर करण्यास अनुमती आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास अनुमती नाही.
- (६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.
- (७) आलेख कागदाचा वापर आवश्यक नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.
- (८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.
- (९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून [१६]

खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :

(i) $t \vee (p \vee q)$ या विधानाचे द्वैती (dual) विधान ----- आहे.

- (a) $c \wedge (p \vee q)$ (b) $c \wedge (p \wedge q)$
 (c) $t \wedge (p \wedge q)$ (d) $t \wedge (p \vee q)$ (२)

(ii) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ या समीकरणाच्या मुख्य उकली (principle solutions) ----- आहेत.

- (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
 (c) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (२)

(iii) जर α, β, γ हे एका रेषेचे सदिश कोन (direction angles) आहेत आणि $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$, तर $\gamma =$ -----

- (a) 30° किंवा 90° (b) 45° किंवा 60°
 (c) 90° किंवा 130° (d) 60° किंवा 120° (२)

(iv) आरंभ बिंदूपासून $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 78$ या प्रतलाचे लंबांतर ----- आहे.

- (a) 4 (b) 5
 (c) 6 (d) 8 (२)

(v) $x = \sin \theta$ आणि $y = \cos 2\theta$ या रेषेच्या वक्राच्या (curve) स्पर्शिकेचा चढ (slope) $\theta = \frac{\pi}{6}$ या बिंदूला ----- आहे.

- (a) $-2\sqrt{3}$ (b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$
 (c) -2 (d) $-\frac{1}{2}$ (२)

(vi) जर $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3 \cdot \sin^4 x \, dx = k$ तर $k = \text{-----}$

(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) 0 (२)

(vii) $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ या रेषीय विकलनीय समीकरणाचा (linear differential equation) समाकलन गुणक (integrating factor) ----- आहे.

(a) x (b) $\frac{1}{x}$
(c) x^2 (d) $\frac{1}{x^2}$ (२)

(viii) जर द्विपद वितरणाचे (binomial distribution) मध्य (mean) व विचरण (variance) अनुक्रमे 18 आणि 12 आहेत तर n ची किंमत ----- आहे.

(a) 36 (b) 54
(c) 18 (d) 27 (२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : [४]

(i) खालील मिश्र विधान (compound statement) सांकेतिक स्वरूपात लिहा.
'नागपूर महाराष्ट्रामध्ये आहे आणि चेन्नई तामिळनाडू मध्ये आहे'. (१)

(ii) जर $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ आणि $p\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ हे सदिश (vectors) एक रेषीय आहेत, तर p ची किंमत काढा. (१)

(iii) सोडवा : $\int \frac{1}{x^2 + 25} dx$ (१)

(iv) एक कण (particle) X-अक्षावर जात असेल, वेळ t वर त्याचे त्वरण (acceleration) हे त्याच्या वेगाच्या (velocity) त्या वेळेच्या प्रमाणात (proportional) असेल तर कणाच्या (particle) गतीचे (motion) विकलनीय समीकरण (differential equation) काढा. (१)

विभाग - ब

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा :

[१६]

प्र. ३. $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ या विधानाची (statement pattern) सत्यता सारणी तयार करा. (२)

प्र. ४. $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ या सारणीला (matrix) व्यस्त आहे किंवा नाही हे तपासा. (२)

प्र. ५. $\triangle ABC$ मध्ये, जर $a = 18$, $b = 24$ आणि $c = 30$ तर $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ ची किंमत काढा. (२)

प्र. ६. $x^2 + kxy - 3y^2 = 0$ या समीकरणाने प्रदर्शित केलेल्या रेषांच्या चढांची बेरीज त्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पट आहे. तर k ची किंमत काढा. (२)

प्र. ७. जर सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ हे, A, B, C या बिंदूचे अनुक्रमे स्थान सदिश आहेत आणि $5\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$, तर बिंदू C रेषाखंड BA ला विभागण्याचे गुणोत्तर काढा. (२)

प्र. ८. $4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ स्थान सदिश (position vector) असलेल्या बिंदूमधून जाणारी आणि $-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ सदिशाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (२)

प्र. ९. जर $y = (\log x)^x$ असेल तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (२)

प्र. १०. सोडवा : $\int \log x \, dx$. (२)

प्र. ११. सोडवा : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ (२)

प्र. १२. वक्र (curve) $y = x^2$, आणि रेषा $x = 1$, $x = 2$ आणि $y = 0$ यांनी बंदिस्त केलेल्या भागाचे (region bounded) क्षेत्रफळ (area) काढा. (२)

प्र. १३. $x + y = u$ चा उपयोग करून $1 + \frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}(x + y)$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (२)

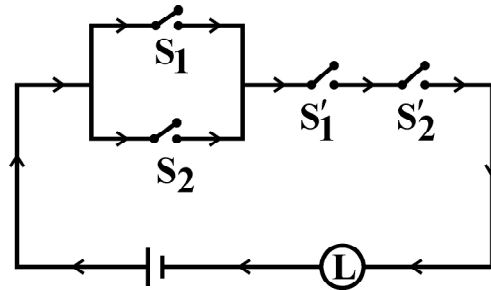
प्र. १४. जर दोन नाणी एकाच वेळेस फेकले तर छापा (head) मिळण्याच्या संख्येच्या संभाव्यतेचे वितरण (probability distribution) लिहा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा :

[२४]

प्र. १५. खालील विद्युत परिपथ (switching circuit) तार्किकी सांकेतिक स्वरूपात लिहा व सत्यता सारणी (switching table) तयार करा :



(३)

प्र. १६. सिद्ध करा : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ (३)

प्र. १७. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा : $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$. (३)

- प्र. १८. सदिश पद्धतीचा (vector method) वापर करून अर्धवर्तुळावर जोडलेला कोन हा काटकोन असतो हे सिद्ध करा. (३)
- प्र. १९. $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ आणि $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ या रेषांमधील सर्वात कमी अंतर (shortest distance) काढा. (३)
- प्र. २०. रेषा $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ आणि प्रतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 8$ यांमधील कोन (angle) काढा. (३)
- प्र. २१. जर $y = \sin^{-1} x$, तर दाखवा की, $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. (३)
- प्र. २२. $\tan^{-1} (1.002)$ ची अंदाजे किंमत (approximate value) काढा.
[दिलेले : $\pi = 3.1416$] (३)
- प्र. २३. सिद्ध करा : $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + c$ (३)
- प्र. २४. $x \cdot \frac{dy}{dx} - y + x \cdot \sin \left(\frac{y}{x} \right) = 0$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)
- प्र. २५. जर $f(x) = kx^2(1-x)$, $0 < x < 1$.
= 0 अन्यथा
यादृच्छय चल X हे फल संभाव्यता घनता फल (p.d.f.) असेल, तर k ची किंमत काढा. (३)
- प्र. २६. एक फासा (die), 6 वेळा फेकला आहे. जर विषम संख्या (odd number) मिळत असेल, तर यशस्वी होते, तर 5 वेळा यशस्वी होण्याची संभाव्यता (probability) काढा. (३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा :

[२०]

प्र. २७. खालील समीकरणे (equations) सोपान पद्धतीने (method of reduction) सोडवा : $x + y + z = 6$, $y + 3z = 11$, $x + z = 2y$.

(४)

प्र. २८. जर $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ या समीकरणाने दर्शविलेल्या रेषांमधील लघुकोन

θ आहे. तर सिद्ध करा की, $\tan \theta = \left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|$ यावरून रेषा एकमेकावर

(coincident) असण्यासाठी अट लिहा.

(४)

प्र. २९. $A(3, 2, -1)$, $B(-2, 2, -3)$, $C(3, 5, -2)$ आणि $D(-2, 5, 4)$ हे शिरोबिंदू (vertices) असणाऱ्या समांतरभुजचिती (parallelopiped) चे घनफळ (volume) काढा.

(४)

प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (L. P. P.) आलेखीय पद्धतीने सोडवा :

कमाल (maximize) : $z = 10x + 25y$

अटी (subject to) : $0 \leq x \leq 3$,

$0 \leq y \leq 3$,

$x + y \leq 5$.

तसेच z ची कमाल किंमत काढा.

(४)

प्र. ३१. जर $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$ हे t या चलाचे विकलनीय फल (differentiable

function) असून y हे x या चलाचे फल आहे आणि $\frac{dx}{dt} \neq 0$, तर सिद्ध करा

$$\text{की, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

यावरून जर $x = at^2$, $y = 2at$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा.

(४)

प्र. ३२. एका पेटीचा (box) वरील भाग (top) उघडा असून खालील भाग (base) चौरसाकृती आहे. पेटीचे पृष्ठफळ (surface area) 147 चौ. सेमी आहे. पेटीचे घनफळ कमाल (largest) असण्यासाठी पेटीची परिमाणे काय असावीत? (४)

प्र. ३३. सोडवा : $\int \frac{5e^x}{(e^x + 1)(e^{2x} + 9)} dx$ (४)

प्र. ३४. सिद्ध करा :

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(2a - x) dx$$

यावरून सिद्ध करा :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad (४)$$

